Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

A 45-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

6 martie 2004

CLASA A IX-A

Subiectul 1

Numerele reale a, b, c satisfac relaţia $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Să se arate că

$$|a| + |b| + |c| - abc \leq 4.$$

Subiectul 2

Să se determine coordonatele vârfurilor unui triunghi ABC în care sunt date ortocentrul $H(-3, 10)$, centrul cercului circumscris $O(-2, -3)$ şi mijlocul $D(1, 3)$ al laturii $[BC]$.

Subiectul 3

a) Să se arate că există o infinitate de numere raţionale $x > 0$ astfel încât

$$\{x^2\} + \{x\} = 0,99.$$

b) Să se arate că nu există numere raţionale $x > 0$ astfel încât

$$\{x^2\} + \{x\} = 1.$$

(s-a notat cu $\{a\}$ partea fracţionară a numărului real a.)

Subiectul 4

Prin împărţirea unui dreptunghi 2×4 în 8 pătrate de latură 1 se obţine o mulţime $\mathcal{M}$ alcătuită din cele 15 vârfuri ale acestora.

Determinaţi punctele $A \in \mathcal{M}$ care îndeplinesc condiţia: *mulţimea* $\mathcal{M} \setminus \{A\}$ *poate fi împărţită în* 7 *perechi* $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_7, B_7)$ *astfel încât*

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \cdots + \overrightarrow{A_7B_7} = \overrightarrow{0}.$$

Timp de lucru 3 *ore.*
Toate subiectele sunt obligatorii.